

Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 144

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 15

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 77

A4.

α. ΛΑΘΟΣ

β. ΛΑΘΟΣ

γ. ΛΑΘΟΣ

δ. ΣΩΣΤΟ

ε. ΣΩΣΤΟ

Θέμα Β

B1. $D_f = \mathbb{R}$

f συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 1} - x)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x^2 + 1)' - 1 = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Ισχύει $x^2 < x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $x^2 < x^2 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{x^2 + 1}$

Αν $x < 0$ τότε $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Αν $x \geq 0$ τότε $x < \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως δεν παρουσιάζει ακρότατο.

B2. Είναι $f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right)' = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + 1) - 2x^2}{2(x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^2 + 2 - 2x^2}{2(x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} > 0$

Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει σημεία καμψής.

B3.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x \right) =$
 $x < 0 \quad = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = (-\infty)(-\sqrt{1 + 0} - 1) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = 0$

Άρα η $y = 0$ ($x'x$) οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)}{x} = -2$, άρα $\lambda = -2$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} - x + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) = 0$

Άρα η $y = -2x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

B4. Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα $f(A) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = (0, +\infty)$

B5.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f''(x)$		+
$f'(x)$		-
$f(x)$		



Θέμα Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = \frac{(1+e^x) \cdot f(x)}{1+f(x)} \Leftrightarrow f'(x)(1+f(x)) = (1+e^x)f(x) \xrightarrow{f(x)>0} \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{f'(x)f(x)}{f(x)} = 1+e^x$$

$$\Leftrightarrow (\ln f(x) + f(x))' = (x+e^x)' \Leftrightarrow \ln f(x) + f(x) = x+e^x + c, c \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$\ln f(0) + f(0) = 0 + e^0 + c \Leftrightarrow \ln 1 + 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{Άρα } \ln f(x) + f(x) = x + e^x \Leftrightarrow \ln f(x) + f(x) = x \cdot 1 + e^x \Leftrightarrow \ln f(x) + f(x) = x \ln e + e^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) + f(x) = \ln e^x + e^x \Leftrightarrow f(x) + \ln f(x) = e^x + \ln e^x, x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με $h(t) = t + \ln t, t > 0$, με $h'(t) > 0$, οπότε η h γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα συνάρτηση 1-1. Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$h(f(x)) = h(e^x) \xrightarrow{h:1-1} f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

Γ2. Είναι:

$$g(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x e^{\frac{1}{x}}, x \in \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x e^{\frac{1}{x}} \right) = 0 \cdot +\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \quad \frac{1}{x} = u \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} \quad \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)$$

$$\stackrel{D.L.H}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{1} = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} \quad \frac{1}{x} = u \quad \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1 = \lambda \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad \frac{1}{x} = u \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} =$$

$$\stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 0}{1} = e^0 = 1 = \beta$$

$$\stackrel{D.L.H}{=}$$

Άρα η ευθεία $y = x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$ και στο $+\infty$

Γ3. Είναι:

$$\alpha < \frac{\alpha+2\beta}{3} < \beta \Leftrightarrow 3\alpha < \alpha + 2\beta < 3\beta \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha < \alpha + 2\beta \\ \alpha + 2\beta < 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha < 2\beta \\ \alpha < \beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha < \beta, \text{ που ισχύει}$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[\alpha, \beta]$ με $f'(x) = e^x$, οπότε ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \frac{\alpha+2\beta}{3}]$ και $[\frac{\alpha+2\beta}{3}, \beta]$, επομένως θα υπάρξει ένα τουλάχιστον:

- $\xi_1 \in (\alpha, \frac{\alpha+2\beta}{3})$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\frac{\alpha+2\beta}{3}) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+2\beta}{3} - \alpha} = \frac{f(\frac{\alpha+2\beta}{3}) - f(\alpha)}{\frac{2(\beta-\alpha)}{3}}$
- $\xi_2 \in (\frac{\alpha+2\beta}{3}, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+2\beta}{3})}{\beta - \frac{\alpha+2\beta}{3}} = \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+2\beta}{3})}{\frac{\beta-\alpha}{3}} = \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+2\beta}{3})}{\frac{\beta-\alpha}{3}}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f''(x) = e^x > 0$, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(\frac{\alpha+2\beta}{3}) - f(\alpha)}{\frac{2(\beta-\alpha)}{3}} < \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+2\beta}{3})}{\frac{\beta-\alpha}{3}} \Rightarrow f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha) < 2\left(f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)\right)$$

$$\Rightarrow 3f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) < f(\alpha) + 2f(\beta) \Rightarrow f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) < \frac{f(\alpha) + 2f(\beta)}{3} \Rightarrow e^{\frac{\alpha+2\beta}{3}} < \frac{e^\alpha + 2e^\beta}{3} \Rightarrow \frac{\alpha+2\beta}{3} < \ln\left(\frac{e^\alpha + 2e^\beta}{3}\right)$$

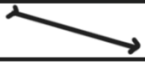
Γ4. Σχηματίζουμε τη διαφορά $\Delta(x) = e^x - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση Δ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\Delta'(x) = e^x - 2x$, $x \in \mathbb{R}$

Επίσης $\Delta''(x) = e^x - 2$, $x \in \mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι $\Delta''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

Επομένως ο πίνακας μονοτονίας-ακροτάτων είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$\Delta''(x)$	-	0	+
$\Delta'(x)$			

Ελάχιστο

$$\Delta'(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0 \quad (\text{εφόσον } e > 2 \xRightarrow{\ln x \uparrow} \ln e > \ln 2 \Rightarrow 1 > \ln 2)$$

Άρα $\Delta'(x) \geq \Delta'(\ln 2) > 0 \Rightarrow \Delta'(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση Δ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } \Delta(0) = e^0 - 0^2 - 1 = 0$$

Άρα η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\Delta(x) = 0$ και ισχύει:

$$\Delta([0,1]) = [\Delta(0), \Delta(1)] = [0, e-2], \text{ άρα } \Delta(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0,1]$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |\Delta(x)| dx \stackrel{\Delta(x) \geq 0}{=} \int_0^1 (e^x - x^2 - 1) dx = \left[e^x - \frac{x^3}{3} - x \right]_0^1 = e - \frac{1}{3} - 1 - (e^0 - 0) = \\ &= e - \frac{1}{3} - 2 = e - \frac{7}{3} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g^2(x) = 1 + f^2(x) \Leftrightarrow g^2(x) - f^2(x) = 1 \Leftrightarrow H(x) = 1$, όπου $H(x) = g^2(x) - f^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Η H είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$H'(x) = 2g(x)g'(x) - 2f(x)f'(x) \stackrel{\substack{g'(x)=f(x) \\ f'(x)=g(x)}}{=} 2g(x)f(x) - 2f(x)g(x) = 0.$$

Άρα η H είναι σταθερή, οπότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $H(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $c = 1$.

$$\text{Είναι } H(0) = c \Leftrightarrow g^2(0) - f^2(0) = c \Leftrightarrow 1^2 - 0^2 = c \Leftrightarrow c = 1.$$

Δ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x)g(x) \neq g^2(x) \Leftrightarrow f(x)g(x) - g^2(x) \neq 0 \Leftrightarrow g(x)(f(x) - g(x)) \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \neq 0 & (1) \\ f(x) - g(x) \neq 0 & (2) \end{cases}$$

Λόγω της (2) έχουμε ότι $D_\varphi = \mathbb{R}$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{e^x(f(x) - g(x)) - (f'(x) - g'(x))e^x}{(f(x) - g(x))^2} \stackrel{\substack{f'(x)=g(x) \\ g'(x)=f(x)}}{=} \frac{e^x(f(x) - g(x)) - e^x(g(x) - f(x))}{(f(x) - g(x))^2} = \\ &= \frac{e^x(f(x) - g(x)) + e^x(f(x) - g(x))}{(f(x) - g(x))^2} = \frac{2e^x(f(x) - g(x))}{(f(x) - g(x))^2} = \frac{2e^x}{f(x) - g(x)} = 2\varphi(x) \end{aligned}$$

Η φ' είναι παραγωγίσιμη και $\varphi''(x) = 2\varphi'(x) = 2 \cdot 2\varphi(x) = 4\varphi(x)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $K(x) \neq 0$ (λόγω της (2))

Επιπλέον η K είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων (οι f και g ως παραγωγίσιμες είναι και συνεχείς).

Άρα η K διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $K(0) = f(0) - g(0) = 0 - 1 < 0$ ισχύει $K(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\varphi(x) = \frac{e^x}{K(x)} < 0$ αφού $\begin{cases} e^x > 0 \\ K(x) < 0 \end{cases}$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$2\varphi(x) < 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) < 0$$

$$4\varphi(x) < 0 \Leftrightarrow \varphi''(x) < 0$$

Επομένως: Η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Η φ είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Έχουμε την εξίσωση: $e^x + (2x+1)(f(x) - g(x)) = 0 \Leftrightarrow e^x = -(2x+1)(f(x) - g(x)) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{f(x) - g(x)} = -(2x+1) \Leftrightarrow \varphi(x) = -2x - 1 \quad (3)$$

Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράτασης της φ στο σημείο $(0, \varphi(0))$.

$$\text{Είναι } \varphi(0) = \frac{e^0}{K(0)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\varphi'(0) = 2\varphi(0) = -2$$

$$\varepsilon: y - \varphi(0) = \varphi'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y + 1 = -2x \Leftrightarrow y = -2x - 1$$

Η φ είναι κοίλη, άρα η ε βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράταση της φ με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\varphi(x) \leq -2x - 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επομένως η (3) έχει μια και μοναδική ρίζα το 0.

$$\Delta 4. \text{ Έστω } I = \int_0^1 (f^2(x) + g^2(x)) dx = \int_0^1 (f(x)f(x) + g(x)g(x)) dx \stackrel{\substack{f(x)=g'(x) \\ g(x)=f'(x)}}{=} \int_0^1 (g'(x)f(x) + f'(x)g(x)) dx =$$

$$= \int_0^1 (f(x)g(x))' dx = [f(x)g(x)]_0^1 = f(1)g(1) - f(0)g(0) \stackrel{f(0)=0}{=} f(1)g(1)$$

Βρίσκουμε τους αριθμούς $f(1)$ και $g(1)$.

Το E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ (άξονας $y'y$) και $x=1$.

Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

$$\text{Είναι } E = \int_0^1 |h(x)| dx$$

$$\text{Για κάθε } x \in [0,1] \text{ είναι } \begin{cases} f(x) - g(x) = K(x) < 0 \\ e^x > 0 \end{cases} \Rightarrow h(x) < 0$$

$$\text{Άρα } E = \int_0^1 (-h(x)) dx = \int_0^1 \frac{g(x) - f(x)}{e^x} dx = \int_0^1 (g(x) - f(x))e^{-x} dx = \int_0^1 [g(x)e^{-x} + f(x)(-e^{-x})] dx \stackrel{g(x)=f'(x)}{=} \\ = \int_0^1 [f'(x)e^{-x} + f(x)(e^{-x})'] dx = \int_0^1 (f(x)e^{-x})' dx = [f(x)e^{-x}]_0^1 = f(1)e^{-1} - f(0)e^0 \stackrel{f(0)=0}{=} \frac{f(1)}{e}$$

$$\text{Είναι } E = \frac{e^2 - 1}{2e^2} \Leftrightarrow \frac{f(1)}{e} = \frac{e^2 - 1}{2e^2} \Leftrightarrow f(1) = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

$$\text{Ισχύει } g^2(x) = 1 + f^2(x) \text{ για κάθε } x \in \square \text{ (ερώτημα } \Delta 1.), \text{ οπότε } g^2(1) = 1 + f^2(1) = 1 + \frac{(e^2 - 1)^2}{4e^2} = \\ = \frac{4e^2 + (e^2 - 1)^2}{4e^2} = \frac{4e^2 + e^4 - 2e^2 + 1}{4e^2} = \frac{e^4 + 2e^2 + 1}{4e^2} = \frac{(e^2 + 1)^2}{(2e)^2} = \left(\frac{e^2 + 1}{2e} \right)^2$$

$$\text{Άρα } \sqrt{g^2(1)} = \sqrt{\left(\frac{e^2 + 1}{2e} \right)^2} \stackrel{\frac{e^2 + 1}{2e} > 0}{\Leftrightarrow} |g(1)| = \frac{e^2 + 1}{2e} \quad (4)$$

Γνωρίζουμε ότι η g είναι συνεχής στο διάστημα $\square$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \square$.

Άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\square$ και επειδή $g(0)=1>0$ ισχύει $g(x)>0$ για κάθε $x \in \square$ οπότε και $g(1)>0$.

Έτσι η (1) γράφεται: $g(1) = \frac{e^2+1}{2e}$

Τελικά: $I = f(1)g(1) = \frac{e^2-1}{2e} \cdot \frac{e^2+1}{2e} = \frac{(e^2-1)(e^2+1)}{4e^2} = \frac{e^4-1}{4e^2}$